ENS de Lyon
L3

Algèbre 1
2024-2025

TD 12 : Tables de caractères

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercices importants

Exercice 1. (Caractères linéaires)

Soit G un groupe fini.

1. Si G est abélien, montrer qu'il admet $\#G$ représentations de degré 1 à isomorphisme près.
2. En déduire que dans le cas général, il en admet $[G : D(G)]$.

Exercice 2. (Certaines propriétés des représentations de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Justifier que σ et σ^{-1} sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
2. En déduire que la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs réelles.

Remarque : On peut même montrer que la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$ est toujours à valeurs entières mais cela nécessite des arguments de théorie des corps du cours d'Algèbre 2.

Exercice 3. (Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$)

1. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ a 4 classes de conjugaison : l'identité, la classe de $(1\ 2\ 3)$, la classe de $(1\ 3\ 2)$, et les doubles transpositions.
2. Montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$ est le sous-groupe des doubles transpositions, et en déduire 3 caractères linéaires de $\mathfrak{A}_4$.
3. Déterminer la dimension de la dernière représentation irréductible de $\mathfrak{A}_4$ grâce aux propriétés de la représentation régulière.
4. En utilisant l'orthogonalité des colonnes, déterminer alors la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 4. (Tables de caractères de D_8 et H_8)

On va calculer les tables de caractères des groupes D_8 et H_8.

1. Soit D_8 le groupe dihédral d'ordre 8. Il est engendré par deux éléments r et s tels que r est d'ordre 4, s est d'ordre 2, et $srs^{-1} = r^{-1}$.
   (a) Montrer que les classes de conjugaison de D_8 sont $\{1\}$, $\{r, r^3\}$, $\{r^2\}$, $\{s, sr^2\}$ et $\{sr, sr^3\}$.
   (b) Montrer que le groupe dérivé de D_8 est $\{1, r^2\}$.
   (c) En déduire que D_8 a 4 représentations de degré 1 et une irréductible de degré 2, ainsi que la table de caractère de D_8.
   À quelle action géométrique correspond la représentation irréductible de degré 2 ?
2. Soit H_8 le groupe tel que $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ et $IJ = K$.
   (a) Montrer que les classes de conjugaison de H_8 sont $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\pm I\}$, $\{\pm J\}$ et $\{\pm K\}$.
   (b) Montrer que le groupe dérivé de H_8 est $\{\pm 1\}$.

(c) En déduire que H_8 a 4 représentations de degré 1 et une irréductible de degré 2, ainsi que la table de caractère de H_8.
À quel morphisme de groupes correspond la représentation irréductible de degré 2 ?

3. Que remarque-t-on ?

Exercice 5. (Tables de caractères des groupes dihédraux)

Soit $n \geqslant 3$ un entier et soit D_{2n} le groupe dihédral d'ordre $2n$. Il est engendré par r d'ordre n, s d'ordre 2 tels que $srs^{-1} = r^{-1}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout entier k, la classe de conjugaison de r^k est égale à $\{r^k, r^{-k}\}$.
(b) Déduire que si n est pair, les rotations forment $\frac{n}{2}$ classes de conjugaisons, et que si n est impair, les rotations forment $\frac{n-1}{2}$ classes de conjugaisons.
(c) Montrer que la classe de conjugaison de s est égale à $s\langle r^2\rangle$.
(d) Déduire que si n est pair, les symétries forment 2 classes de conjugaisons, et que si n est impair, les symétries forment 1 classe de conjugaison.

2. **(a)** Montrer que le groupe dérivé de D_{2n} est égal à $\langle r^2\rangle$.
(b) Montrer que quand n est pair ce groupe est cyclique d'ordre $\frac{n}{2}$ engendré par r^2, et quand n est impair, il est cyclique d'ordre n engendré par r.
(c) En déduire que D_{2n} a 4 représentations irréductibles de degré 1 quand n est pair, et 2 quand n est impair.

3. **(a)** Montrer que pour tout entier k, on a une représentation ρ_k de degré 2 de D_{2n} telle que $\rho_k(r) = R_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $\rho_k(s) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (où R_θ est la matrice de rotation d'angle θ).
(b) Montrer que ρ_k et ρ_ℓ sont isomorphe si et seulement si $k \equiv \pm\ell \pmod{n}$.
(c) Montrer que ρ_k est réductible si et seulement si $k \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$.

4. En déduire toutes les représentations irréductibles de D_{2n} ainsi que leur caractère.

Exercice 6. (Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$)

1. Donner l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ ainsi que leurs cardinaux.

2. Notons H la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ et ε la signature. Montrer que H et $\varepsilon \otimes H$ ne sont pas isomorphes et en déduire 4 représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$ ainsi que leur caractères.

On note $V := H \otimes H$. On rappelle (voir exercice 9 du TD 11) que $H \otimes H$ se décompose en deux sous-représentations :

$$H \otimes H = \mathrm{Sym}^2(H) \oplus \Lambda^2(H)$$

avec $\dim(\mathrm{Sym}^2(H)) = \dfrac{\dim(H)(\dim(H)+1)}{2}$ et $\dim(\Lambda^2(H)) = \dfrac{\dim(H)(\dim(H)-1)}{2}$. De plus, leurs caractères sont donnés par

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2(H)}(g) = \frac{\chi_H(g)^2 + \chi_H(g^2)}{2} \quad \text{et} \quad \chi_{\Lambda^2(H)}(g) = \frac{\chi_H(g)^2 - \chi_H(g^2)}{2}.$$

3. Calculer le caractère de $\Lambda^2(H)$ et montrer qu'elle est irréductible.

4. **(a)** Calculer le caractère de $\mathrm{Sym}^2(H)$.
(b) Montrer que $\mathrm{Sym}^2(H)$ se décompose en somme directe de trois sous-représentations irréductibles.
(c) Montrer que l'on a $\mathrm{Sym}^2(H) \cong \mathbb{1} \oplus H \oplus W$ où W est une représentation de dimension 5.

5. Calculer le caractère de W, montrer que W n'est pas isomorphe à $\varepsilon \otimes W$ où ε est la signature puis donner la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. (Table de caractères de $\mathfrak{A}_5$)

1. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ par conjugaison sur $\mathfrak{S}_n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, exprimer $\frac{\#\mathfrak{S}_n \cdot \sigma}{\#\mathfrak{A}_n \cdot \sigma}$ en fonction de $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ et $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$. En déduire que la classe de conjugaison de σ sous l'action de $\mathfrak{A}_n$ est soit égale à sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, soit est de cardinal moitié.
2. Montrer que les 5-cycles $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. En déduire que les 5-cycles forment deux classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$, alors que les autres types de permutations restent conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Donner les 5 classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$, ainsi que leurs cardinaux.
3. En reprenant les notations de l'exercice précédent, montrer que la restriction de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ et de la représentation W sont des représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$.
4. Montrer que les deux dernières représentations irréductibles recherchées sont toutes les deux de dimension 3. On les note V_1 et V_2.
5. En utilisant l'orthogonalité des caractères, et l'irréductibilité de V_1 et V_2, finir la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 8. (Sur les groupes d'ordre impair)
Soit G un groupe fini.

1. Montrer que le nombre de caractères irréductibles de G à valeurs réelles est égal au nombre de classes de conjugaison de G stables par inverse. (*Indication* : remarquer que $\langle \overline{\chi}, \chi \rangle$ vaut 0 ou 1 selon qui est à valeurs réelles ou non et utiliser l'orthogonalité des colonnes de la table de caractères).
2. Montrer que la table de caractères de G est réelle si et seulement si toutes les classes de conjugaisons de G sont stables par inverse.

On suppose dans le reste de l'exercice que G d'ordre impair.

3. Montrer que la seule classe de conjugaison stable par inverse est celle du neutre et l'unique ligne réelle de sa table de caractères et celle du caractère trivial (remarquer qu'une involution sur un ensemble de cardinal impair admet un point fixe).
4. On admet que le degré des représentations irréductibles de G divise $\#G$. Montrer que $\#G$ est congru au nombre de classes de conjugaison de G modulo 16.

Exercice 9.
Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe fini G.

1. Montrer que $\chi_V(g) = \dim(V)$ si et seulement si $g \in \ker(\rho)$.
2. On suppose que la représentation (V, ρ) est fidèle et on note r le nombre de valeurs distinctes que prend χ_V. Montrer que pour toute représentation W, il existe un entier $n \leqslant r$ tel que $V^{\otimes n}$ a un facteur isomorphe à W.
3. Donner un contre exemple lorsque (V, ρ) n'est pas fidèle.

Exercice 10. (Représentations induites)
Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. Montrer qu'une représentation (V, ρ) du groupe G fournit une représentation de H. On l'appelle la *restriction* de (V, ρ), notée $\left(\mathrm{Res}_H^G V, \mathrm{Res}_H^G \rho\right)$.

Réciproquement, soit (W,θ) de H. On fixe $g_1,\dots,g_n$ un système de représentants du quotient G/H, et on suppose que $g_1 = 1$. On pose

$$V_{G/H} := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}e_{g_i} \quad \text{et} \quad V := V_{G/H} \otimes W,$$

On munit V d'une action de G : pour $g \in G$ et $i \in [\![1,n]\!]$, il existe une unique paire $(j(i),h) \in [\![1,n]\!] \times H$ telle que $gg_i = g_{j(i)}h$. Pour $w \in W$, on pose alors

$$\rho(g) \cdot (e_{g_i} \otimes w) := e_{j(i)} \otimes (\theta(h)w).$$

C'est la représentation l'*induite* de (W,θ) à G, que l'on note $\left(\operatorname{Ind}_H^G W, \operatorname{Ind}_H^G \theta\right)$.

2. **(a)** Montrer que la définition ci-dessus est bien définie et est une représentation de G.

(b) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $V_0 \subset V$ stable par l'action de H et tel que $(V_0, \rho_{|H})$ est isomorphe à (W,θ) en tant que représentation de H.

(c) Montrer que pour $g \in G$, l'espace vectoriel $\rho(g)V_0$ ne dépend que de la classe de g dans G/H et que $V = \bigoplus_{\overline{g} \in G/H} \rho(g)V_0$.

(d) Montrer que les propriétés des deux questions précédentes caractérisent l'induite de (W,θ) à isomorphisme près.

3. Montrer que pour toute représentation (V',ρ') de G, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V') \cong \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G V')$ et que $\langle \chi_{\operatorname{Ind}_H^G V}, \chi_{V'} \rangle = \langle \chi_W, \chi_{\operatorname{Res}_H^G V'} \rangle$.

4. Montrer que le caractère de la représentation induite de (W,θ) est

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ g_i^{-1} g g_i \in H}} \chi_W(g_i^{-1} g g_i) = \frac{1}{\# H} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1} g x \in H}} \chi_W(x^{-1} g x).$$

Exercice 11. (Exemples de représentations induites)

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

(a) On suppose l'action transitive et pour $x_0 \in X$ fixé, on note H le stabilisateur de x_0. Montrer qu'on a un isomorphisme de représentations $\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1} \cong V_X$.

(b) En déduire que pour toute représentation irréductible $W \in \mathcal{I}_G$, la multiplicité de W dans V_X est égal à $\dim\left(W^H\right)$. Autrement dit, la décomposition de V_X en représentations irréductibles est

$$V_X \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{I}_G} W^{\dim\left(W^H\right)}.$$

(c) Énoncer et démontrer un résultat similaire dans le cas où l'action n'est plus transitive.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On fixe $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine n-ième primitive de l'unité. Pour un entier k, on pose

$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \overline{\ell} & \longmapsto & \zeta^{k\ell} \end{array}.$$

On rappelle que les $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On pose $\rho_k : D_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ l'induite de φ_k à D_{2n} (on identifie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au sous-groupe de D_{2n} engendré par r). Montrer que les $(\rho_k)_{0 < k < \frac{n}{2}}$ sont irréductibles et non isomorphes.